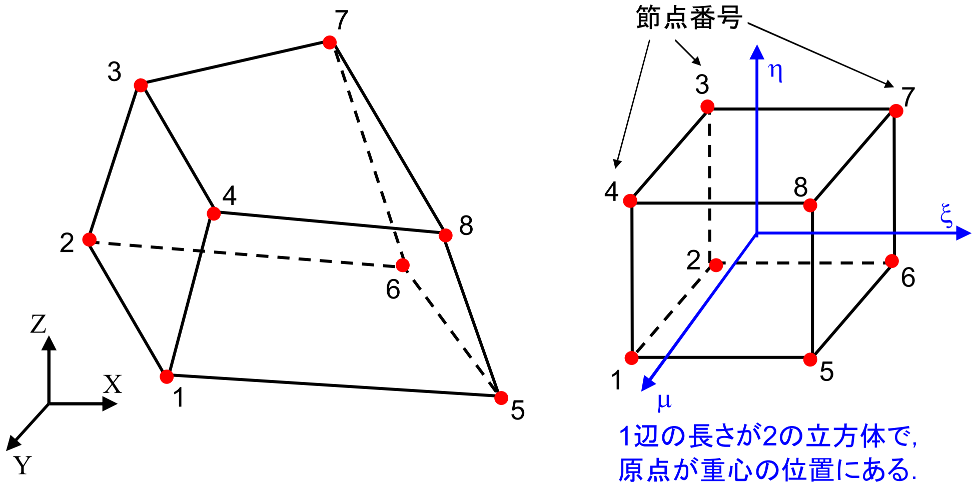
作成日：2010/9/21
小池雄介

有限要素法での 8 節点六面体要素の要素行列の作り方

有限要素法における 8 節点六面体要素の計算方法について記述する．その理由は，出版されている本を読んでも 8 節点六面体要素に関してあまり記述がなされていないからである．また，形状関数の座標系における要素整合質量行列（要素調和質量行列）の作り方については記述がないことが多い．そこで本資料では，細かい部分は全て飛ばして，8 節点六面体要素での剛性行列，質量行列を作成するのに必要な計算のみを記す．



(a) 実際の要素の形状の例　　(b) 内挿に用いる8節点六面体要素の形状

図　要素形状

図 1 に実際の要素の形状の例と，内挿に用いる 8 節点六面体形状を示す．実際の要素形状の節点変位を 8 節点六面体形状の各節点に配置することで要素内部の変位を内挿する．x-y-z 座標系で表される実空間と，ξ–η–μ座標系で表される基底空間を関連付ける形状関数を以下に示す．

$$N_1 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1+\mu) \tag{1}$$

$$N_2 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1-\eta)(1-\mu) \tag{2}$$

$$N_3 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1-\mu) \tag{3}$$

$$N_4 = \frac{1}{8}(1-\xi)(1+\eta)(1+\mu) \tag{4}$$

$$N_5 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1+\mu) \tag{5}$$

$$N_6 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1-\eta)(1-\mu) \tag{6}$$

作成日：2010/9/21
小池雄介

$$N_7 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1-\mu) \qquad (7)$$

$$N_8 = \frac{1}{8}(1+\xi)(1+\eta)(1+\mu) \qquad (8)$$

以上の形状関数を用いて節点座標の内挿を行う．

$$x = N_1 x_1 + N_2 x_2 + N_3 x_3 + N_4 x_4 + N_5 x_5 + N_6 x_6 + N_7 x_7 + N_8 x_8 \qquad (9)$$

$$y = N_1 y_1 + N_2 y_2 + N_3 y_3 + N_4 y_4 + N_5 y_5 + N_6 y_6 + N_7 y_7 + N_8 y_8 \qquad (10)$$

$$z = N_1 z_1 + N_2 z_2 + N_3 z_3 + N_4 z_4 + N_5 z_5 + N_6 z_6 + N_7 z_7 + N_8 z_8 \qquad (11)$$

このときヤコビアン行列$[J]$は以下のようになる．

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial x}{\partial \mu} & \frac{\partial y}{\partial \mu} & \frac{\partial z}{\partial \mu} \end{bmatrix} \qquad (12)$$

次に，ひずみ-変位関係行列$[B]$を示す．ただし，ひずみ-変位関係行列$[B]$は複雑なので，2 つの行列の積にとして表記する．

$$[B] = [D'][N] \qquad (13)$$

$$[D'] = \begin{bmatrix} \frac{\partial(\ )}{\partial x} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\partial(\ )}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\partial(\ )}{\partial z} \\ \frac{\partial(\ )}{\partial y} & \frac{\partial(\ )}{\partial x} & 0 \\ 0 & \frac{\partial(\ )}{\partial z} & \frac{\partial(\ )}{\partial y} \\ \frac{\partial(\ )}{\partial z} & 0 & \frac{\partial(\ )}{\partial x} \end{bmatrix} \qquad (14)$$

$$[N] = [N_1[I_3] \quad N_2[I_3] \quad N_3[I_3] \quad N_4[I_3] \quad N_5[I_3] \quad N_6[I_3] \quad N_7[I_3] \quad N_8[I_3]] \qquad (15)$$

$$[I_3] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \qquad (16)$$

ここで$[D']$行列内の偏微分の計算式を以下に示す．

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{|J|} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} & \frac{\partial z}{\partial \xi} \\ \frac{\partial f}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} & \frac{\partial z}{\partial \eta} \\ \frac{\partial f}{\partial \mu} & \frac{\partial y}{\partial \mu} & \frac{\partial z}{\partial \mu} \end{bmatrix} \qquad (17)$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}=\frac{1}{|J|}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial f}{\partial \xi} & \dfrac{\partial z}{\partial \xi}\\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial f}{\partial \eta} & \dfrac{\partial z}{\partial \eta}\\ \dfrac{\partial x}{\partial \mu} & \dfrac{\partial f}{\partial \mu} & \dfrac{\partial z}{\partial \mu}\end{bmatrix} \tag{18}$$

$$\frac{\partial f}{\partial z}=\frac{1}{|J|}\begin{bmatrix}\dfrac{\partial x}{\partial \xi} & \dfrac{\partial y}{\partial \xi} & \dfrac{\partial f}{\partial \xi}\\ \dfrac{\partial x}{\partial \eta} & \dfrac{\partial y}{\partial \eta} & \dfrac{\partial f}{\partial \eta}\\ \dfrac{\partial x}{\partial \mu} & \dfrac{\partial y}{\partial \mu} & \dfrac{\partial f}{\partial \mu}\end{bmatrix} \tag{19}$$

ただし，f は擬似変数であり，実際には N_1，N_2，N_3 などが代入される．次に，応力-ひずみ関係行列 $[D]$ を以下に示す．

$$[D]=\frac{E}{(1+\nu)(1-2\nu)}\begin{bmatrix}1-\nu & \nu & \nu & 0 & 0 & 0\\ \nu & 1-\nu & \nu & 0 & 0 & 0\\ \nu & \nu & 1-\nu & 0 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2} & 0 & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2} & 0\\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dfrac{1-2\nu}{2}\end{bmatrix} \tag{20}$$

以上の式より要素剛性行列 $[k]$，要素整合質量行列 $[m]$，要素体積 V を以下のように求めることができる．

$$[k]=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[B]^T[D][B]|J|d\xi d\eta d\mu \tag{21}$$

$$[m]=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}[N]^T\rho[N]|J|d\xi d\eta d\mu \tag{22}$$

$$V=\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}|J|d\xi d\eta d\mu \tag{23}$$

ただし，ρ は材料の密度である．これらの式に含まれる積分操作を数値計算において行う場合，実際に積分してもよいし，ガウス積分を行ってもよい．最後の 3 式に関しては，どの要素を用いても共通となるはずなので，別な要素における要素整合質量行列の計算などにも使えるはずだと思います．

参考文献

1)Peter Kattan, MATLAB Guide to Finite Elements AN INTERACTIVE APPROACH, Springer, 2007

2)A. Ghali, A. M. Neville, 川上　洵，構造解析の基礎と応用―線形・非線形解析および有限要素法―，技報堂出版，2001

3)小松敬治，機械構造振動学　MATLAB による有限要素法と応答解析，森北出版株式会社，2009

4)矢川元基，青山裕司，有限要素固有値解析　大規模並列計算手法，森北出版株式会社，2009

＊＊本資料に載っている式は合ってるとは思いますが確認してから使って下さい．＊＊